Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física Gleb Wataghin
F609-Tópicos de Ensino de Física I

Relatório Final

O Pêndulo de Wilberforce

(Oscilação Translacional e Rotacional Acoplada)

Dezembro de 2009

Aluno: Vitor Lécio Lacerda Fontanella RA:065022
E-mail: vitorlecio@gmail.com

Orientador: Prof. Dr. Alberto Saa
Email: asaa@ime.unicamp.br

Coordenador: Prof. Dr. Jose Joaquín Lunazzi
E-mail: lunazzi@ifi.unicamp.br

1) Resultados atingidos

Foi construído um pêndulo de Wilberforce que é um ótimo exemplo de sistema em que há acoplamento entre dois tipos de oscilações resultando em uma completa transferência de energia entre os dois tipos de movimentos harmônicos que no caso é o translacional e o rotacional. Isso significa que é possível observar momentos de alternância da oscilação puramente translacional com momentos de oscilação puramente rotacional. Esse curioso fenômeno é observado para determinadas condições, por isso o projeto de montagem foi cuidadosa na determinação de parâmetros e medidas.

O ponto de partida da montagem foi a escolha de uma mola e de seus parâmetros para que a partir desses se determinassem os outros. Os parâmetros de mola escolhidos foram as sugeridas no artigo de Berg e Marshall [1]. Outras molas são possíveis sendo importante se atentar para suas constantes elásticas de translação. No anexo 1 encontram-se métodos matemáticos para se encontrar as constantes a partir dos parâmetros da mola. Neste anexo pode-se observar que é possível alcançar constantes iguais com parâmetros de mola diferentes.

Os parâmetros escolhidos nos exigem um projeto de pesos em escala de dimensões espaciais compatíveis com os objetivos didáticos e de possibilidades de construção deste projeto.

Na tabela dois são apresentados os parâmetros básicos de construção da mola usada no projeto.

Tabela 1: Parâmetros da Mola:

Parâmetros Físicos para a Mola	
Diâmetro Externo	3,0 cm
Diâmetro do Arame	1 mm
Números de Espiras	130
Material Arame	Aço Inox

*O espaçamento sem carga entre as espiras deve ser de 1mm, ou seja, as espiras estarão juntas quando sem carga.

Uma mola pode ter deformação elástica e plástica. A deformação elástica se reconstitui, o que possibilita a oscilação. Já a deformação plástica é indesejada por deformar a mola. Para que se diminuam os efeitos de deformação plástica na mola a mesma deve receber um tratamento térmico, por isso foram enviados os parâmetros de construção da tabela 1 a uma empresa especializada. Muitas são as empresas no estado de São Paulo que fazem o serviço a um custo que varia de 35 a 50 reais para os parâmetros da tabela 1.

Figura 1: Mola utilizada no projeto.

Com a construção da mola temos condições de determinar características importantes da mesma, tais como as constantes de elasticidade rotacional e translacional, para assim se projetar junto com a informação do material disponível de construção, o peso do Pêndulo. O pêndulo deveria ter um meio de ajuste do momento de inércia para uma faixa compatível com as condições de observação do fenômeno de alternância de oscilações puras. As expressões utilizadas para o cálculo do peso oscilador estão expostas no Anexo 2 e as medidas do mesmo na tabela 2. No peso oscilador há pesos menores de ajuste que são fixados em suas posições com um parafuso. Um detalhe técnico pensado na fase de projeto foi de como se acoplaria a mola no suporte e a mesma no peso. Na literatura isso era feito de várias formas, para que o peso não se movesse livremente e assim toda a oscilação tanto rotacional quanto translacional fosse transmitida totalmente à mola. Nas figuras 2 e3 é possível visualizar como isso foi feito para este projeto.

Figura 2: Peso oscilador feito de latão com momento de inércia ajustável.

Tabela 2: Medidas do Peso Oscilador com momento de inércia ajustável.

Parâmetros para o Peso Oscilador	
Diâmetro principal	3 cm
Diâmetro da junção superior	1 cm
Altura Total	5 cm
Comprimento do eixo horizontal	10 cm
Altura dos pesos de ajuste	2 cm
Largura dos pesos de ajuste	1 cm
Diâmetro do eixo horizontal	0,5 cm
Material	Latão

Figura 3: Elo de fixação entre o suporte e a mola, feito de latão.

Com as peças prontas e definido o meio de fixação ao suporte, o mesmo foi construído usando retalhos de madeira de construções e parafusos. O suporte teve de ter uma altura de aproximadamente 1,5m, pois a mola esticada com as oscilações chega a um tamanho próximo de 1,8m, assim é necessário que se coloque o pendulo sobre uma mesa. Com um suporte grande, para evitar vibrações foi fundamental um tarugo de madeira ligando o tarugo horizontal e vertical para uma boa sustentação. A madeira de suporte tem de agüentar o torque sobre a base de maneira que o sistema não tombe.

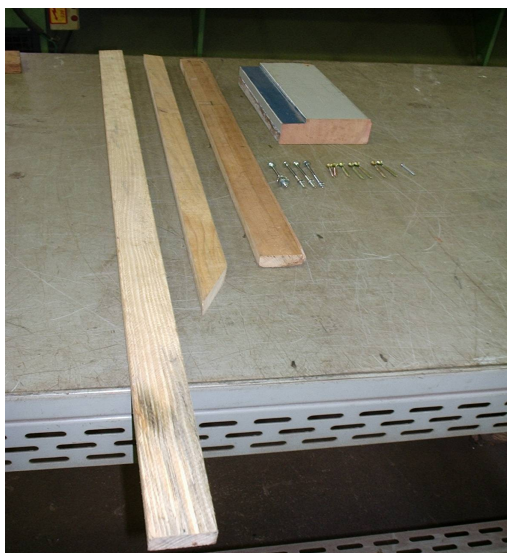



Figura 4: Materiais utilizados na construção do suporte.

Figura 5: Suporte Montado.

Com todas as partes construídas chegou-se à construção final mostrada na figura 6.

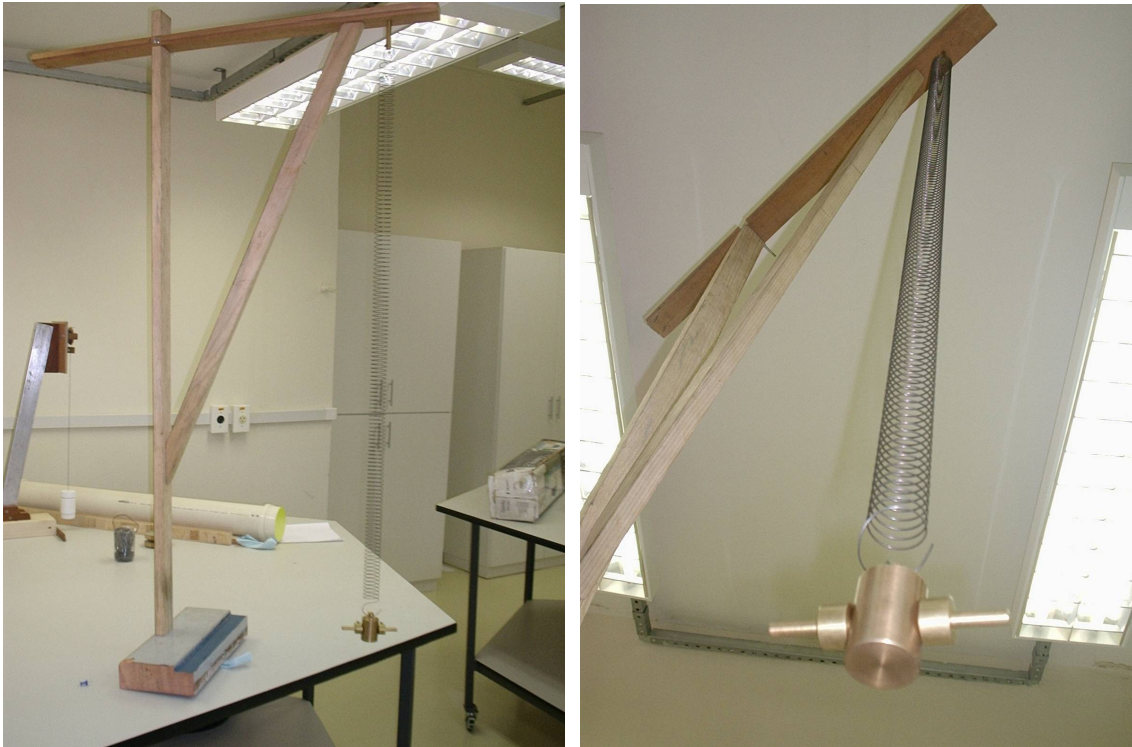



Figura 6: Montagem Final do Pêndulo de Wilberforce.

Com a montagem acima foi feito testes para várias posições do peso de ajuste, ou seja, para vários momentos de inércia diferentes. Para uma posição onde o peso de ajuste estava distante 2 cm do eixo central foi observado a alternância de oscilações puramente rotacionais e puramente translacionais.

2) Dificuldades encontradas

Não se conseguiu nesse projeto fazer uma montagem com materiais alternativos. Essa montagem foi tentada, mas devido à falta de tempo, considerando-se a montagem principal feita acima, para obtenção e testes de materiais e de recursos para sua compra não se conseguiu chegar a uma montagem deste tipo que obtivesse sucesso na visualização dos fenômenos de interesse.

Foram feitas tentativas fazendo-se o peso oscilador com parafusos e massinhas e mais tarde fazendo-se com o material "Durepoxi". Contudo o grande problema não foi a construção do peso, pois este último material se prestava bem para isso. A grande dificuldade foi a obtenção ou construção de uma mola que atendesse às qualificações necessárias ao projeto. Foram feitos testes com espiras de caderno de 10 matérias (figura 7), estas apresentaram uma constante elástica muito alta, sendo que para pesos de até 0,5Kg não se tinham oscilações com amplitude de boa visualização. Uma alternativa talvez fosse a de se misturar chumbo com Durepoxi para se conseguir pesos maiores e a de se conseguir uma espira de caderno de mais matérias no mercado, como as de 20 matérias.

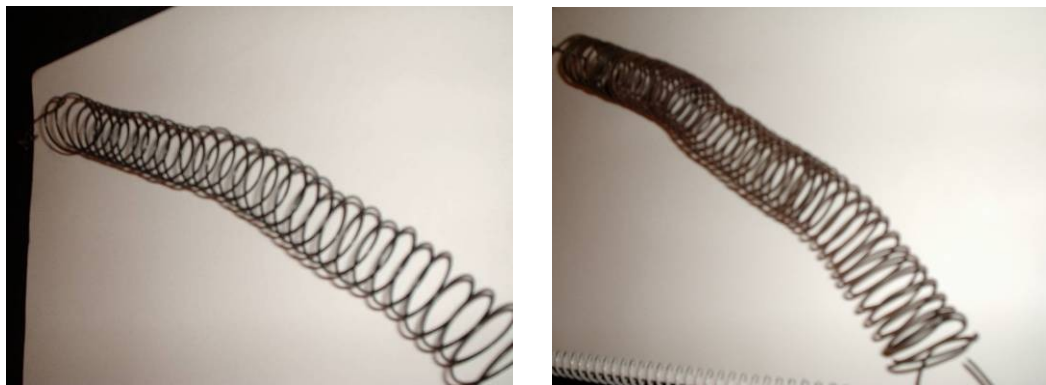



Figura 7:À esqueda espira de caderno de arame e à direita mola construída.

Foi também construída uma mola com arame de construção já que em lojas especializadas a venda era feita em metragens muito grandes. Essa construção foi feita simplesmente enrolando um arame bem tencionado em um cano. O problema dessa construção é que foi utilizado um arame que se mostrou muito mole e que a partir de uma tensão mediana já apresentava deformação plástica. Essa mola também apresentou uma constante elástica muito alta sendo que para pesos de 0,5Kg não se tinha uma boa observação das oscilações. Uma alternativa talvez seja a de se utilizar um arame de maior dureza e de se tentar uma construção com um maior diâmetro e maior quantidade de espiras, já que na construção foi feita uma mola com diâmetro de 2,5cm. Com um maior diâmetro externo de mola e maior número de espiras é de se esperar constantes elásticas menores como sugerido no anexo 1.

5) Pesquisa realizada e Referências

A busca pela internet se deu via buscador Google e a palavra chave utilizada foi Pêndulo de Wilberforce e “Wilberforce Pendulum”. Pouca coisa foi encontrada com a palavra chave em português.

A Wikipédia em inglês trás o verbete da palavra chave, tendo como conteúdo uma breve descrição e, o que nos foi mais útil, tem boas referências e links. A partir deste ponto se deu preferência às referências publicadas no meio acadêmico.

[1]Berg R. H, Marshall T.; Wilber force pendulum oscillations and normal modes. Am. J. Phys. 59 (1) January 1991, pp. 32-38. Descrição matemática aprofundada.

[2]Pitre, John. "Wilberforce Pendulum". *Physics 182S lab*. Univ. of Toronto. http://faraday.physics.utoronto.ca/PHY182S/WilberforcePendulum.pdf. Retrieved 2008-05-03. Proposta para atividade experimental para estudantes de graduação. Abordagem simplificada.

[3]A.P. French, Vibrations and Waves, Chap. 5. Material que aborda osciladores acoplados e modos normais de oscilação.

[4]L.R. Wilberforce, “On the vibrations of a loaded spiral spring,”Philos. Mag. 38. 386-392 (1894). Artigo original de Wilberforce, onde ele faz o estudo do pêndulo.

[5] Ferraz, Luiz. http://www.feiradeciencias.com.br/sala05/05_52.asp. Descrição breve do experimento.

[6] WebSite: http://www.compadre.org/OSP/items/detail.cfm?ID=7569, (Último acesso 19/10/09). Encontra-se o download de um programa para a simulação do pêndulo de Wilberforce.

[7] Manual de instruções do aparato experimental PASCO, disponível em: ftp://ftp.pasco.com/Support/Documents/English/ME/ME-8091/012-08397a.pdf (Último

acesso 19/10/09). Existe a descrição de uma atividade experimental para alunos de graduação.
[8]Website: http://www.cienciamao.if.usp.br/tudo/exibir.php?midia=rip&cod=_construcaodemolas-mecanica-txtmec0020, (Último acesso 19/10/09). Ensina a como construir uma mola.
[9]Website: http://www.feiradeciencias.com.br/sala02/02_034.asp (Último acesso 19/10/09). Ensina como construir uma mola.
[10] Halliday,D. Fundamentos de Física, v.1 e v2. 3ª ed. LTC editora, 1994. Teoria básica sobre momento de inércia, conservação de energia, osciladores e fenômeno de batimentos.
[11] H.M. Nussenzveig; Curso de Física Básica v.2 3ed.Editora Edgard Blücher Teoria muito boa sobre osciladores acoplados.
[12] Wikipédia- http://en.wikipedia.org/wiki/Wilberforce_pendulum . Ponto de partida para o estudo.

6) Descrição do trabalho

Nível Básico

O pêndulo de Wilberforce não é o pêndulo onde ocorre uma "força wilber", é sim antes de tudo um invento de um físico britânico de nome estranho Wilberforce. Esse cara é muito menos famoso que o próprio pêndulo que inventou. Não era à toa, o pêndulo do senhor Lionel Robert Wilberforce tem um comportamento muito curioso.

Já ouviu falar em lei da conservação da energia? Se existe uma lei na física que merece o glorioso título de lei é a da conservação de energia. Uma lei física é algo que tem uma validade geral e a lei que nos referimos nunca foi desmentida por nenhum estudo até hoje. No experimento do pêndulo de Wilberforce é possível observar que a energia dada inicialmente ao pêndulo se conserva entre dois tipos de movimentos oscilatórios.

A todo movimento temos uma energia associada. Quanto mais intenso o movimento maior é a energia. É a velha história, prefiro ser atropelado por uma tartaruga andando, do que por uma tartaruga atirada de um canhão de artilharia. O que ocorre em um atropelamento é exatamente a transferência da energia de um movimento, por exemplo, de um carro (caso mais habitual) para o atropelado e seus ossos.

Dito isso temos que entender que o peso do pêndulo de Wilberforce pode se movimentar para cima e para baixo e também girar em torno de si, oscilando no sentido horário e anti-horário. Chamamos esses movimentos de oscilação translacional e oscilação rotacional respectivamente.

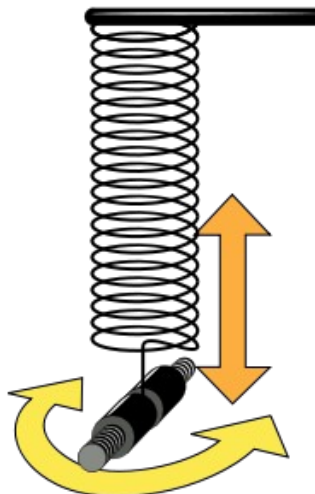



Figura 8: Tipos de movimento e oscilação no Pêndulo de Wilberforce.

O pêndulo de Wilberforce faz parte da espetacular família dos pêndulos acoplados. O acoplamento é uma relação e ao mesmo tempo uma dependência entre os tipos de oscilação do pêndulo. No nosso caso, já foi dito, temos que os tipos de oscilação são o translacional e rotacional, são essas duas oscilações que estão acopladas no pêndulo de Wilberforce.

O acoplamento é fácil de entender, pois ela se deve ao fato de que quando torcemos uma mola ela estica e o inverso também acontece, quando esticamos ou comprimimos uma mola ela se torce.

Assim temos que quando iniciamos a oscilação esticando a mola levando o peso para baixo temos nesse início um movimento translacional e uma energia associada a esse movimento. Mas quando a mola se comprime ou estica ela exerce uma influência que faz a mola girar, e esse giro é repassado para o peso que começa a girar também. Mas aí o peso gira e torce a mola e quando a mola é torcida ela estica e se comprime. E quando a mola estica e se comprime ela se torce e assim por diante, oscila-se em giros e sobes e desces estando esses movimentos acoplados.

Já deu para imaginar essa bagunça de movimentos. Mas além de termos a oscilação translacional e rotacional e as duas juntas no pêndulo teremos também a alternância, e podemos dizer a oscilação, entre momentos em que o movimento só será rotacional e momentos em que o movimento só será translacional.

São nesses momentos que ficamos instigados, pois tínhamos os dois movimentos e passamos a ter apenas um tipo. E outra constatação. Nesses momentos de um tipo apenas de movimento temos o que se diz amplitude máxima da oscilação. Ou seja, se temos apenas o movimento translacional então ocorre nesse momento o sobe e desce maior e se temos apenas a rotação temos a maior quantidade de giros para um lado e outro. É também o momento que observamos a maior velocidade de translação e rotação.

Isso é explicado pela lei de conservação de energia. Temos nos momentos de tipo único de oscilação que toda a energia dada por você ao sistema no início estará associada à oscilação do tipo correspondente. Quando temos os dois tipos de oscilação a energia dada inicialmente está dividida entre os dois tipos de oscilação. Contudo a energia do sistema permanece a mesma. Na verdade existe uma perda de energia gradual, pois o sistema acaba interagindo com o meio.

Assim o pêndulo de Wilberforce nos permite ver sucessivas transferências de energia entre dois movimentos e andando na linha segundo a lei de conservação

podemos dizer que a energia associada aos movimentos não excede ao valor de energia dado inicialmente, sendo a energia do sistema constante e igual à inicial.

Nível Ensino Médio

A energia total do sistema em um momento qualquer da oscilação será a soma das várias expressões da energia envolvidas no pêndulo. Identificamos facilmente a energia cinética de translação e a energia cinética de rotação. Para entender a energia cinética de rotação basta imaginar que as moléculas também estão em movimento quando estão girando.

As energias cinéticas são dadas pelas seguintes equações:

$$K_T = \frac{mv^2}{2} \qquad (1)$$

, onde, $\mathbf{K_T}$ é a energia cinética translacional,**m** é a massa do peso oscilador e **v** é a velocidade do peso oscilador. A equação para a energia cinética de rotação ($\mathbf{K_R}$) tem a mesma forma, mas depende de variáveis rotacionais.

$$K_R = \frac{I\omega^2}{2} \qquad (2)$$

, onde **I** é o momento de inércia e $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular da torção.

Continuando a análise temos também a energia potencial elástica que é armazenada na estrutura da mola. Quando a mola está comprimida quer dizer que ela tem uma energia potencial, pois suas moléculas ficam tencionadas e com uma capacidade de se esticar, exercer uma força e por fim realizar trabalho. Temos também uma energia potencial similar associada à elasticidade de torção da mola. Ou seja, quando torcemos a mola ela tem capacidade de se destorcer exercendo força e realizando trabalho também.

As energias potenciais elásticas são dadas pelas equações abaixo:

$$U_T = \frac{Kx^2}{2} \qquad (3)$$

, onde **K** é a constante de elasticidade translacional da mola e **x** é o deslocamento na vertical do peso de sua posição de equilíbrio.

$$U_R = \frac{\delta\theta^2}{2} \qquad (4)$$

, onde $\boldsymbol{\delta}$ é a constante de elasticidade rotacional da mola e $\boldsymbol{\theta}$ é o deslocamento angular do peso de uma posição de equilíbrio.

Quando colocamos o peso sobre a mola a mesma vai se esticar um pouco e ficará em equilíbrio em certo ponto que será nossa referência, ou seja, nesse ponto temos $\mathbf{x=0}$. Temos também uma posição de equilíbrio e referência para a torção que será o $\boldsymbol{\theta}\mathbf{=0}$. Nesses pontos determinamos com as equações $\mathbf{U_T}$ e $\mathbf{U_R}$ que as energias potenciais elásticas são nulas.

Uma vez citado as expressões da energia no sistema podemos escrever a energia total do mesmo como a soma das energias cinéticas e potenciais.

$$E = K_T + K_R + U_T + U_R = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{Kx^2}{2} + \frac{\delta\theta^2}{2} \quad \textbf{(5)}$$

, onde **E** é a energia total do sistema com as coordenadas de um dado instante.

Quando apenas um tipo de oscilação ocorre no pêndulo, e por conseqüência apenas um tipo de movimento temos que a energia inicial estará dividida entre a energia potencial elástica e a energia do movimento em questão. Por exemplo, se o único movimento é o translacional, a energia do sistema estará dividida e oscilando entre o movimento do peso para cima e para baixo e a energia potencial elástica do alongamento e compressão da mola com referência ao ponto **x=0**. O movimento de rotação e a torção da mola serão praticamente nulas nesse instante, e assim a energia cinética rotacional e a energia potencial elástica de torção serão nulas.

Com isso temos:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{Kx^2}{2} + \frac{\delta\theta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I0^2}{2} + \frac{Kx^2}{2} + \frac{\delta 0^2}{2}$$

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{Kx^2}{2} \quad \textbf{(6)}$$

E ainda nesse caso podemos considerar o instante em que o peso passa por **x=0**. A energia potencial elástica nesse caso será nula e toda a energia do sistema estará na forma de movimento translacional. Assim neste instante teremos a maior velocidade.

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{Kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{K0^2}{2}$$

$$E = \frac{mv_{\max}^2}{2} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad \textbf{(7)}$$

Ainda na oscilação com apenas um movimento vemos que a amplitude de oscilação do tipo referido é a maior. Quando ainda no caso translacional a oscilação chega a um extremo a velocidade do movimento translacional fica igual a zero e assim a energia cinética é igual a zero estando toda a energia do sistema na forma de energia potencial elástica. Como a energia potencial elástica depende do deslocamento da mola em relação ao ponto zero temos que nesse instante será o momento em que o sistema estará mais esticado ou comprimido, dito de outra forma, teremos a amplitude máxima.

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{Kx^2}{2} = \frac{m0^2}{2} + \frac{Kx^2}{2}$$

$$E = \frac{Kx_{\max}^2}{2} \Rightarrow x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{K}} \quad \textbf{(8)}$$

Você deve ter percebido que no peso que oscila no pêndulo existem parafusos e que podemos ajustar a distância destes ao centro. O objetivo de a peça ser feita desta maneira é o de ajustar uma coisa chamada momento de inércia e que influencia na freqüência de oscilação do pêndulo. Outras coisas influenciam na freqüência de oscilação, como a massa do peso e as constantes de elasticidade. Contudo essas variáveis não são boas para manipular em ajustes.

O momento de inércia (**I**) é o equivalente da massa nos movimentos translacionais para o movimento rotacional. É muito mais difícil girar uma roda cheia de crianças no parquinho do que cheia de marmanjos barrigudos (e embriagados para se colocarem nessa situação). Mas só a quantidade de massa não é suficiente para definirmos o momento de inércia é importante sabermos a distribuição dela em relação ao eixo de rotação. Quanto mais perto do eixo está a massa menor é a dificuldade que ela impõe ao giro. É o caso da bailarina que se encolher para girar mais rápido ou abre os braços e pernas para girar mais devagar.

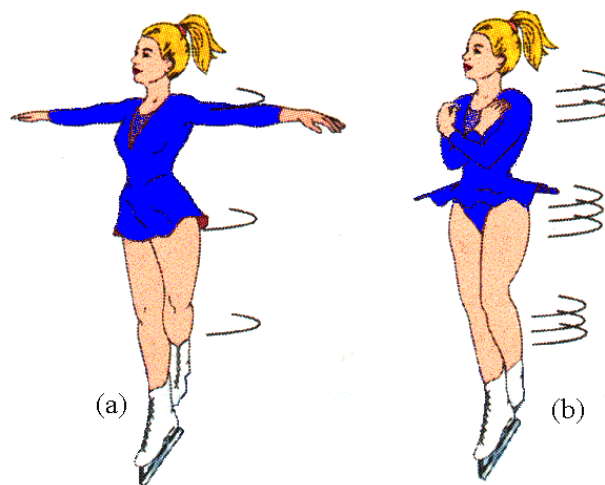



Figura 9: Bailarina com os braços esticados tem maior momento de inércia e gira mais devagar do que se tivesse com os braços juntos ao corpo e assim com um momento de inércia menor.

Já que falamos de momento de inércia é sabido que ele influencia na freqüência da oscilação rotacional **(f_T)** que é dada por:

$$f_T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\delta}{I}} \qquad (9)$$

, onde δ é a constante de elasticidade de torção da mola e I o momento de inércia.

O momento de inércia de uma massa pontual é dado por:

$$I = MR^2 \qquad (10)$$

Onde **M** é a massa pontual e **R** é a distância da massa ao eixo de rotação.
No pêndulo de Wilberforce temos um momento de inércia associado à massa do peso que é distribuída cilindricamente **(I_c)** e também com os pequenos pesos que tem distância regulável com o eixo **(I_p)**. Esses “pesinhos” serão considerados como massas pontuais. Além do momento de inércia do peso temos também que considerar o momento de inércia da mola **(I_m)** com um fator de correção de um terço. Assim o momento de inércia total **(I)** é dado por:

$$I = I_c + I_p + \frac{1}{3} I_m \qquad (11)$$

Assim é possível ajustar a freqüência de oscilação rotacional ajustando $\mathbf{I_p}$.

$$f_T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\delta}{I_c + I_p + \frac{1}{3} I_m}} \qquad (12)$$

A freqüência de oscilação translacional é dada por

$$f_T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (13)$$

A massa utilizada carrega um fator de massa da mola, pois esta influencia na freqüência também.Assim m é dado por

$$m = m_p + \frac{m_m}{3} \qquad (14)$$

, onde m_p é a massa do peso e m_m a massa da mola.

Uma vez montado o aparato experimental essa freqüência é fixa.

Grosso modo temos que fazer com que as freqüências de translação e rotação sejam aproximadamente iguais. Esta é uma condição necessária para termos o fenômeno de batimento que no nosso caso é a alternância de tipos de oscilação. Assim

$$\begin{aligned} &f_T = f_R \\ &\Rightarrow \frac{\delta}{I} = \frac{K}{m} \Rightarrow I = \frac{m\delta}{K} \end{aligned} \qquad (15)$$

O ajuste dos pesinhos deve ter em vista essa condição.

Nível Graduação

Podemos descrever os dois tipos de oscilação no pêndulo de Wilberforce com as equações de um oscilador básico.

$$\begin{aligned} \theta &= A\cos(\omega t) \\ x &= A'\cos(\omega' t) \end{aligned}$$

, onde A e A’ é a amplitude da oscilação e w e w’ são as freqüências angulares das oscilações. Contudo esse pêndulo possui um acoplamento.E com a superposição das oscilações temos que:

$$\theta = a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\frac{1}{2}(\omega' + \omega)$$

$$x = a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\mathrm{sen}\frac{1}{2}(\omega' + \omega).$$

Assim temos uma situação típica de batimento modulada por $a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ para **θ** e $a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ para **x.** Observe que a modulação das amplitudes está em quadradura (figura 6). Assim o máximo de uma equivale ao mínimo da outra. É exatamente isso que observamos no Pêndulo de Wilberforce, quando temos o máximo de oscilação translacional temos o mínimo de oscilação rotacional e vice-versa. A Freqüência do batimento é igual à diferença entre as duas freqüências de oscilação.

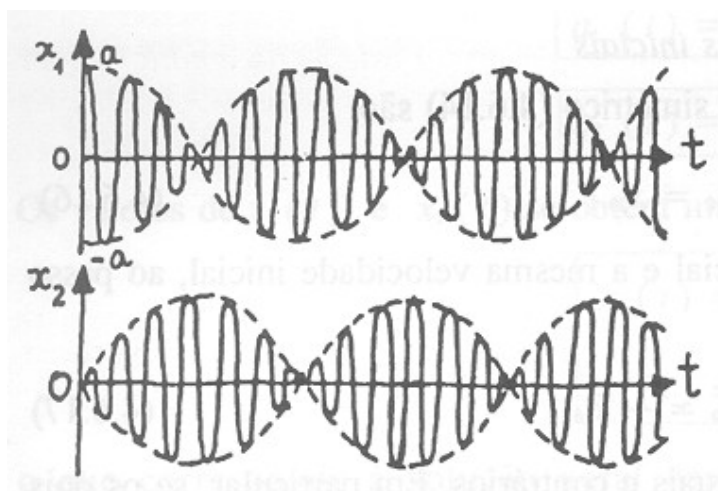



Figura 10: Modulação em quadradura para x1 e x2.

As duas oscilações possuem mesma freqüência, o processo é ressonante. Assim a amplitude de uma oscilação cresce rapidamente enquanto a outra decresce, pois a energia total respeita a conservação de energia.

No site da Open Source Physics[6] é possível obter um programa em 'Java"que simula o pêndulo de Wilberforce. O programa permite a visualização do movimento do pêndulo. O programa constrói um gráfico referente tem como eixos as posições das oscilações. Assim o gráfico é θ X x e neste é possível observar o desenho quadrangular típico de seu comportamento. Outro gráfico fornecido é o da amplitude de cada oscilação em decorrer do tempo. É visível nesse gráfico a coincidência dos mínimo de um tipo de oscilação com os máximos do outro.

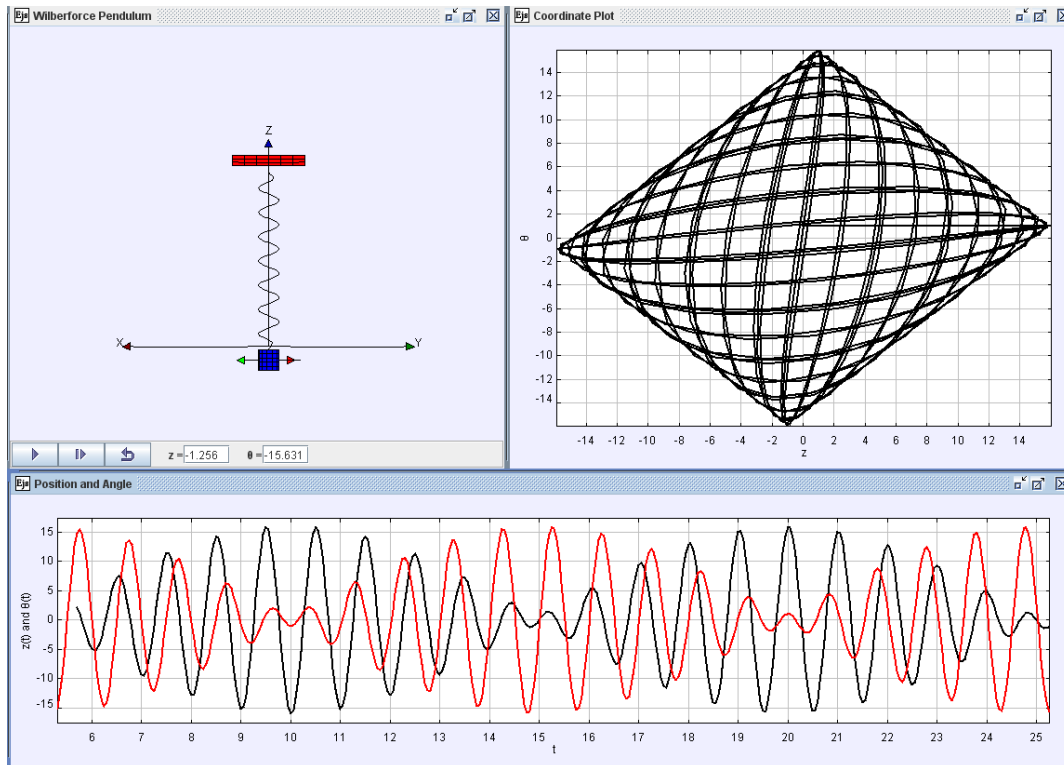



Figura 11: Simulação computacional do pêndulo de Wilberforce. Parte superior esquerda: Esquema do pêndulo. Parte superior direita gráfico da posição angular com a posição de translação. Abaixo as amplitudes das oscilações com o tempo.

7) Declaração do orientador:

O meu orientador realizou os seguintes comentários:

"Considero o trabalho realizado de ótimo nível. O estudante foi impecável na construção e na análise teórica. Destaco seu interesse por apresentar o problema para alunos do nível secundário e de graduação. Em ambos os casos, foi muito claro e preciso na exposição dos conceitos relevantes. Sem dúvidas, o trabalho merece a nota máxima (dez)"

8) Horário da Apresentação do Painel

Sexta- feira, dia 11/12/2009 no primeiro horário, das 15h às 17h.

Anexo 1: Determinação teórica de Parâmetros da Mola

O método de Summerfeld nos dá relações que nos permite determinar teoricamente a constante de elasticidade translacional e rotacional da mola dada as especificações da mesma. Assim a constante de elasticidade translacional(k) da mola é dada por

$$k = \frac{Gd^4}{64nR^3} \qquad \text{(A1)}$$

, onde n é o número de espiras, d é o diâmetro do arame e R o raio das espiras. Aqui $G=8.1x10^{10}$ Pa.

A constante de elasticidade rotacional da mola(δ) é

$$\delta = kR^2(1+\sigma \cos^2\alpha) \qquad \text{(A2)}$$

, onde s é o raio de Poisson cujo valor é de 0,23. O valor de α é 0.14 para uma mola que tem distanciamento nulo entre suas espiras quando esta está descarregada.

Utilizando das relações (A1) e (A2) determinamos com os valores da tabela 1 as constante da mola usada obtendo k=2,8N/m e δ=8,0±0,1N.m.

A determinação da constante de elasticidade translacional foi verificada experimentalmente tendo boa concordância como mostrado no Anexo 4.

Anexo 2: Determinações das medidas para construção do peso oscilador.

Aplicando as constantes elásticas determinadas no anexo 1 na condição de ressonância dada pela equação (15) determinamos uma razão entre o momento de inércia e a massa do peso.

O momento de inércia é dado pela equação (11) substituindo agora pelas expressões de momento inercial correspondente a cada parte do pêndulo temos e considerando as variáveis expostas na figura A2 temos:

$$I = I_c + I_p + \frac{1}{3}I_m = $$
$$= Mr^2 + 2mR^2 + \frac{1}{3}m_m\left[\left(\frac{d-0{,}001}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right] \qquad \text{(A3)}$$

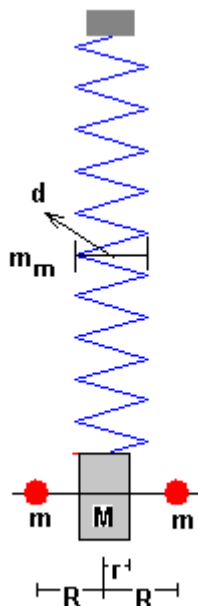



Figura 12: Variáveis para o momento de inércia.

A mola tem um a massa de 80g e o valor d=3cm. Determina-se então um valor de I em função de r, R, m e M. Substituindo esse I em (15), com as constantes elástica já determinadas temos uma relação entre essas variáveis. A densidade do material usado, o latão, é de 8,6g/cm^3. Assim se estipula uma massa que seja aproximadamente 400g considerando a deformação da mola em torno de 1,4m no equilíbrio. Assim 400g será a soma dos componentes do peso. O peso não pode ter um diâmetro muito grande para não ter um momento de inércia que impossibilite a ressonância, nem pequeno demais para que os pesinhos não sejam suficientes para alcançar a condição de ressonância. Levando isso em conta determinei um r=3cm. E um R entre 1,5 e 5 cm. Com a densidade do material e tendo em consideração a massa total de 400g calculei a altura do peso.

A determinação de todas as medidas é um cálculo com muitas variáveis não tendo uma solução analítica. Assim considerações reais como, por exemplo, o peso não pode ter uma altura muito pequena, pois pode tombar, são fatores para o estabelecimento de algumas medidas.

Anexo 3: Como construir uma mola

Existem maneira caseiras de se construir molas(Anexo 4) [8][9]. Porém para o diâmetro de mola que desejamos, cerca de 3cm, precisamos de uma tarugo de ferro que será onde o arame será enrolado também de diâmetro 3 cm. Assim para molas de tais diâmetros aconselhamos o uso de um torno para girar o tarugo de ferro. Assim para se construir a mola é necessário:

- Arame de aço 1mm de diâmetro.
- Tarugo de aço de diâmetro escolhido, no nosso caso 3 cm.
- Torno mecânico.

Prende-se a ponta do arame no torno junto ao tarugo e ligando o começa-se a enrolá-lo em torno do tarugo. Precisa-se nesse instante se fazer pressão no arame para que este fique justo ao tarugo.

Uma alternativa para que quiser fazer uma mola desse diâmetro é enrolar o arame no tarugo utilizando-se de força manual.

Anexo 4: Determinação da constante Elástica da mola

A mola foi submetida a ação do peso de várias massas diferentes conhecidas, assim se determinou as forças pesos(F) com base na aceleração da gravidade. Para os diferentes pesos foi medido o deslocamento da mola(Δx) de seu ponto inicial. E com a lei de Hookes onde $F = K\Delta x \Rightarrow K = \frac{F}{\Delta x}$ foi determinada a constante K.

Tabela 3: Dados da determinação da constante elástica translacional da mola.

Δx(m)	EΔx(m)	F(N)	E F(N)	K(N/m)	EK(N/m
0,180	0,002	0,539	0,005	3,0	0,5
0,359	0,002	1,078	0,005	3,0	0,5
0,539	0,002	1,617	0,005	3,0	0,5
0,719	0,002	2,156	0,005	3,0	0,5
0,898	0,002	2,695	0,005	3,0	0,5

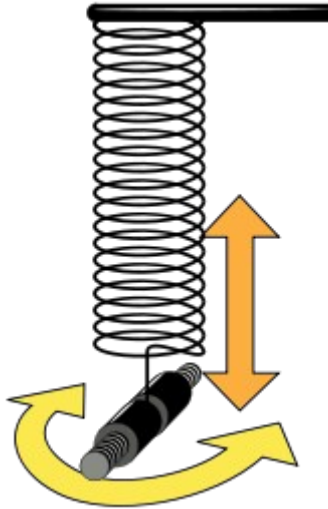
Assim determinamos a constante elástica translacional da mola por um procedimento simples. Obtemos o valor de (3,0±0,5)N/m.

Anexo 5: Conteúdos dos sites:

Referência 12, 08

- **[12] Wikipédia- http://en.wikipedia.org/wiki/Wilberforce_pendulum :**

Wilberforce pendulum

From Wikipedia, the free encyclopedia

A Wilberforce pendulum alternates between two oscillation modes.

A **Wilberforce pendulum**, invented by British physicist Lionel Robert Wilberforce around 1896[1], consists of a mass suspended by a long helical spring and free to turn on its vertical axis, twisting the spring. It is an example of a coupled mechanical oscillator, often used as a demonstration in physics classes. It can both bob up and down on the spring, and rotate back and forth about its vertical axis with torsional vibrations. When correctly adjusted and set in motion, it exhibits a curious motion in which periods of purely rotational oscillation gradually alternate with periods of purely up and down oscillation. The energy stored in the device shifts slowly back and forth between the translational 'up and down' oscillation mode and the torsional 'clockwise and counterclockwise' oscillation mode, until the motion gradually dies out.[2]

Despite the name, it doesn't swing back and forth as ordinary pendulums do. The mass usually has opposing pairs of radial 'arms' sticking out horizontally, threaded with small weights that can be screwed in or out to adjust the moment of inertia to 'tune' the torsional vibration period.

Wilberforce pendulum, 1908

The device's intriguing behavior is caused by a slight coupling between the two motions or normal modes, due to the geometry of the spring. When the weight is moving up and down, each downward excursion of the spring causes it to unwind slightly, giving the weight a slight twist. When the weight moves up, it causes the spring to wind slightly tighter, giving the weight a slight twist in the other direction. So when the weight is moving up and down, each oscillation gives a slight back and forth rotational impulse to the weight. In other words, each oscillation some of the energy in the translational mode leaks into the rotational mode. Slowly the up and down movement gets less, and the rotational movement gets greater, until the weight is just rotating and not bobbing. Similarly, when the weight is rotating back and forth, each twist of the weight in the direction that unwinds the spring also reduces the spring tension slightly, causing the weight to sag a little lower. Conversely, each twist of the weight in the direction of winding the spring tighter causes the tension to increase, pulling the weight up slightly. So each oscillation of the weight back and forth causes it to bob up and down more, until all the energy is transferred back from the rotational mode into the translational mode and it is just bobbing up and down, not rotating.

Alternation or 'beat' frequency

The frequency at which the two modes alternate is equal to the difference between the oscillation frequencies of the modes. The closer in frequency the two motions are, the slower will be the alternation between them. This behavior, common to all coupled oscillators, is analogous to the phenomenon of beats in musical instruments, in which

two tones combine to produce a 'beat' tone at the difference between their frequencies. For example, if the pendulum bobs up and down at a rate of f_T = 4 Hz, and rotates back and forth at a rate of f_R = 4.1 Hz, the alternation rate f_{alt} will be:

$$f_{alt} = f_R - f_T = 0.1\,Hz$$
$$T_{alt} = 1/f_{alt} = 10\,seconds$$

So the motion will change from rotational to translational in 5 seconds and then back to rotational in the next 5 seconds.

The pendulum is usually adjusted by moving the moment of inertia adjustment weights in or out equal amounts on each side, until the rotational frequency is close to the translational frequency, so the alternation period will be slow enough to allow the change between the two modes to be clearly seen.

References

1. ^ Wilberforce, Lionel Robert (1896). "On the vibrations of a loaded spiral spring". *Philosophical Magazine* **38**: 386–392. http://books.google.com/books?id=TVQwAAAAIAAJ&pg=PA386. Retrieved 2008-01-09.
2. ^ Berg, Richard E.; Marshall, Todd S. (May 4, 1990). "Wilberforce pendulum oscillations and normal modes". *American Journal of Physics* **59** (1): 32–37. doi:10.1119/1.16702. http://faraday.physics.utoronto.ca/PHY182S/WilberforceRefBerg.pdf. Retrieved 2008-05-03.

External links

- Pitre, John. "Wilberforce Pendulum". *Physics 182S lab*. Univ. of Toronto. http://faraday.physics.utoronto.ca/PHY182S/WilberforcePendulum.pdf. Retrieved 2008-05-03.
- Video of Wilberforce pendulum oscillating, by Berkeley Lecture Demonstrations, YouTube.com, retrieved April 25, 2008

- **[8]Website: http://www.cienciamao.if.usp.br/tudo/exibir.php?midia=rip&cod=_construcaodemolas-mecanica-txtmec0020 :**

Cursos e Eventos Novidades Fale conosco Imprimir Login

Financiamento e apoio:

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

- **[9]Website: http://www.feiradeciencias.com.br/sala02/02_034.asp (Último acesso 19/10/09). Ensina como construir uma mola.**

Dinamômetro

(Máquina de fazer molas)

Prof. Luiz Ferraz Netto
leobarretos@uol.com.br

Objetivo

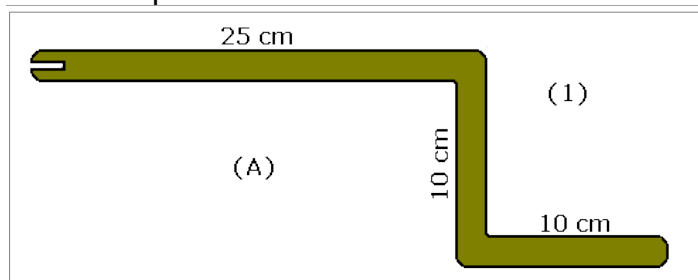
Aprender a técnica para fazer molas de aço. Montar um aparelho que serve para medir pesos e intensidades de forças em geral.

Material

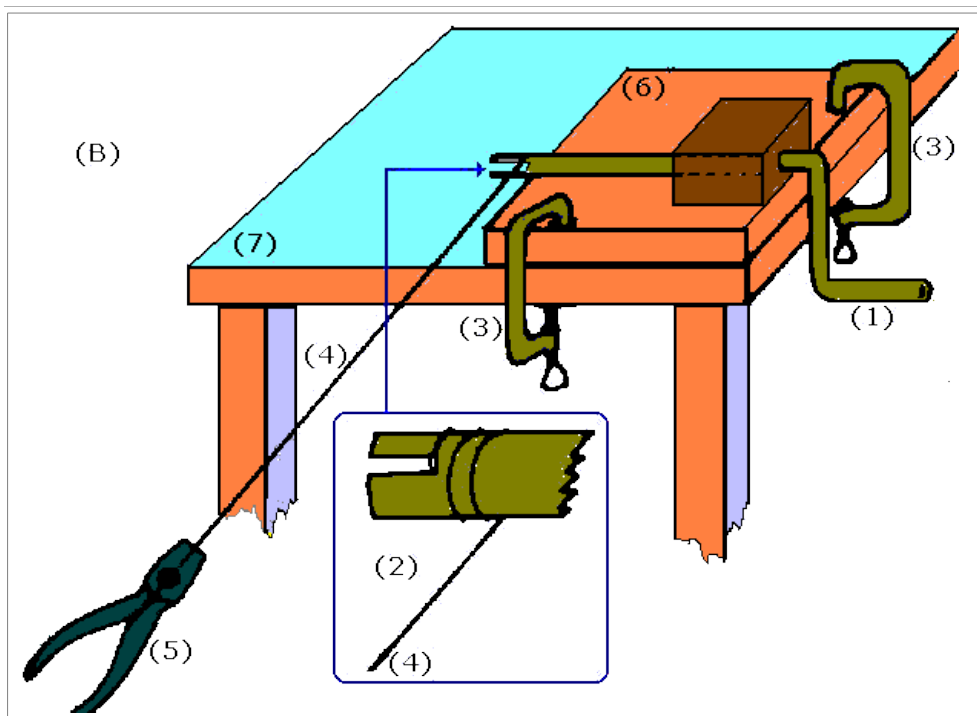
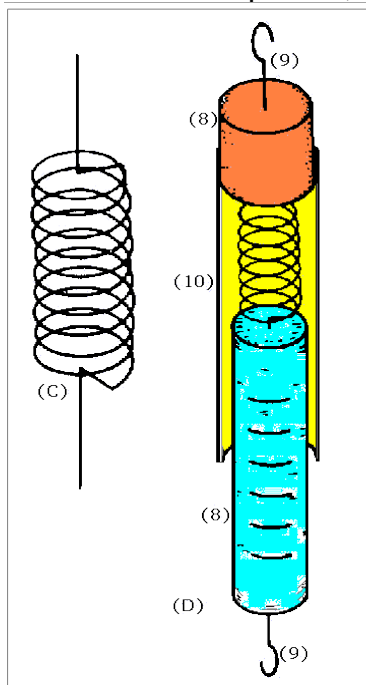
> Ferro redondo liso de 45cm e diâmetro 8mm
> Serra de ferro
> Toco de madeira (10 x 6 x 5) cm
> Cola, alicate, canivete ou faca
> Arame de aço de 3 m e 0,5 mm (loja de ferragens)
> Sarrafo de 'pinus' (15 x 1,5 x 1,5) cm
> Cano de PVC (1/2") de 25cm
> Dois pitões tipo gancho pequenos
> Tábua (14 x 20 x 2) cm e dois sargentos

Nota: Dispondo-se de uma morsa, pode-se suprimir a tábua e os sargentos.

Montagem da "máquina de fazer molas"

> Dobre o tarugo de ferro como se ilustra na fig. A e, a seguir, faça um sulco, com a serra de ferro, na extremidade da parte comprida da 'manivela'. Esse sulco tem profundidade de cerca de 1 cm.

> Faça um furo de 8mm no toco de madeira, de lado a lado, nas faces de 6cm x 5cm e introduza o ferro no furo (esse furo pode ficar bem rente a uma das faces de 10 cm por 6 cm).

> Cole (ou aparafuse) esse toco na tábua grande, como indica a fig. B e, com os sargentos, fixe o conjunto na extremidade da mesa.

> Prenda a ponta do fio de aço no sulco feito no tarugo de ferro (detalhe B-2) e peça a um aluno para segurar com um alicate a outra ponta, mantendo o fio bem esticado.

> Vá girando a manivela, sempre com o fio bem esticado, até que ele fique todo enrolado no ferro e com as espiras bem juntas. Se a 'manivela' estiver bem rente à tábua, os sulcos deixados pelo fio de aço, na tábua, irão facilitar o processo.
> Ao terminar de enrolar, solte vagarosamente o fio e dobre suas extremidades as pontas, como indica a fig. C.

Legenda

(1) ferro de ορτεμ®ιδ 8mm; (2) extremidade do ferro ampliada para mostrar o engate do fio; (3) sargentos; (4) fio de aço; (5) alicate; (6) tábua; (7) mesa; (8) cilindro de 'pinus'; (9) pitões-gancho; (10) cano de PVC para revestir a montagem final.

> Dê formato cilíndrico ao sarrafo (fig. D-8), cuidando para que os primeiros 3

cm penetre bem apertados no cano de PVC e os restantes 12 cm passe pelo cano com folga. Corte esse sarrafo cilíndrico, separando os 3cm ajustados dos 12 cm folgados.

> Finque os extremos retos da mola no centro da base de cada sarrafo (fig. D-9) e coloque o conjunto no cano, como se vê na fig. D.

> Enrosque nos centros das bases livres dos cilindros os dois pitões-gancho (fig. D-9).

> Para calibrar o aparelho, pendure pesos aferidos no dinamômetro e faça tracinhos no cilindro móvel, como indica a fig. D-8.

Procedimento

> Experimente pesar vários objetos ao seu alcance, procurando sempre não exceder o limite do aparelho (até o fim do cilindro com marcas).

Observação

Para as experiências a seguir, deverá dispor de três dinamômetros, no mínimo. Mãos à obra!